ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE STATALE " A. VOLTA "

con LICEO SCIENTIFICO TECNOLOGICO e BIOLOGICO.

FORMAZIONE PROFESSIONALE: Operatore meccanico ed elettrico.

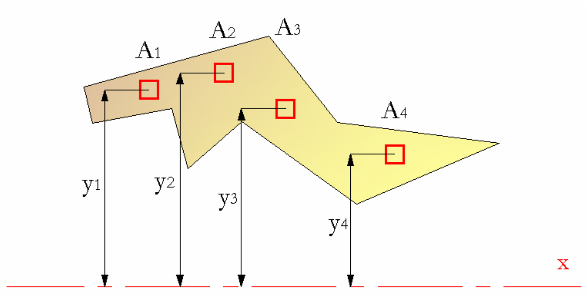
Classe IV MB. A.S. 2008/2009

DISPENSA INTEGRATIVA N° 2.

MOMENTI STATICI DEL PRIMO ORDINE E BARICENTRI.

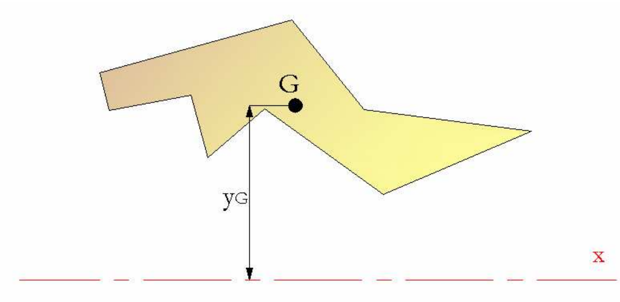
2.1. - Introduzione.

Si definisce momento statico **(S)** di una superficie, rispetto ad un asse contenuto nel suo piano di appartenenza, la somma dei prodotti di tutte le sue aree elementari, moltiplicate per la distanza di ciascuna di esse dall' asse considerato. Le relazioni matematiche sono:



$$S_x = \sum_1^n A_i \cdot y_i = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + ...A_n \cdot y_n \quad (1.1)$$

$$S_y = \sum_1^n A_i \cdot x_i = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + ...A_n \cdot x_n \quad (1.2)$$



Un' altra definizione di momento statico è la seguente: il momento statico **(S)** di una superficie, rispetto ad un asse contenuto nel suo piano di appartenenza, è pari al prodotto tra la sua area per la distanza del suo baricentro dall' asse ovvero

$$S_x = A \cdot y_G \quad (1.3.) \qquad S_y = A \cdot x_G \quad (1.4.)$$

Il momento statico, sia esso calcolato rispetto ad un asse orizzontale o verticale, risulta essere nullo se l' asse considerato passa per il baricentro della figura.

2.2. - Proprietà del baricentro.

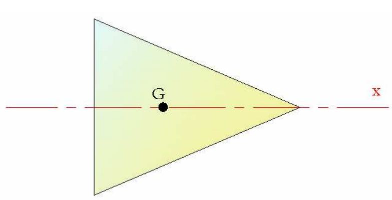
Mediante il calcolo del momento statico, è possibile ricavare le coordinate del **baricentro** di una qualsiasi figura piana convessa o concava. Il baricentro è il punto rispetto al quale il momento risultante generato dalle forze peso è nullo. *Non è il punto in cui è applicata la forza peso!!!*

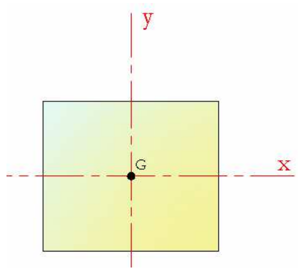
Le proprietà di questo punto sono:

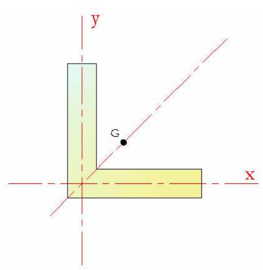
a) Se una figura piana possiede asse di simmetria, il baricentro G, si troverà su di esso.

b) Se la figura piana possiede due assi di simmetria, il baricentro G si colloca nella loro intersezione.

c) Il baricentro G, può trovarsi anche all' esterno della figura.







2.3. - Teoremi di Varignon e Guldino.

Il baricentro di una figura piana complessa, può essere trovato mediante l' applicazione di due teoremi molto importanti. Le fasi in cui si articola la ricerca di questo punto, secondo VARIGNON, sono:

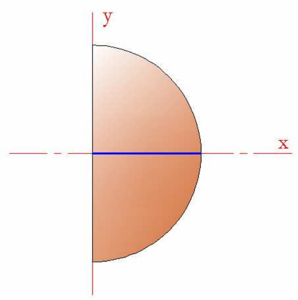
a) Scomporre la superficie in figure piane elementari.

b) Trovare la distanza del loro baricentro dall' asse.

c) Applicare le relazioni (1.1) e (1.2).

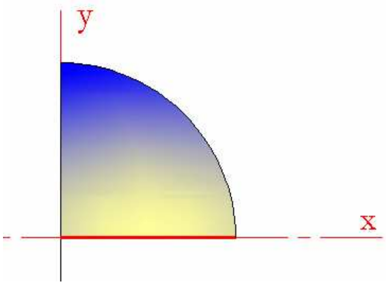
d) Dividere il risultati trovati con (1.1) e (1.2) per l' area totale della superficie.

Da precisare che le due relazioni appena citate sono somme algebriche, pertanto se in una figura sono presenti cavità, esse compariranno nella formula del momento statico col segno negativo.



Il secondo teorema di GULDINO enuncia che il volume del solido generato dalla rotazione di una superficie piana, intorno ad un asse contenuto nel piano stesso, è dato dal prodotto dell' area della superficie per la circonferenza descritta dal suo baricentro. In relazione: $V = 2\pi \cdot r \cdot A$ (r rappresenta il raggio della circonferenza descritta dal baricentro).

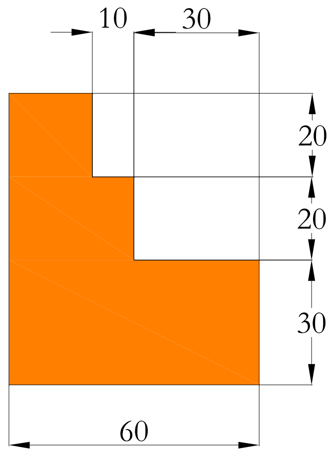
Un' importante applicazione del teorema di Guldino è il calcolo del baricentro di un semicerchio e di un quarto di cerchio. Esaminando la figura a lato è facile capire che l' applicazione del teorema di Varignon non è di nessun ausilio per la soluzione del problema. Applicando invece Guldino, il problema si riduce al semplice calcolo di un volume. Il semicerchio è simmetrico rispetto all' asse *x* pertanto il baricentro, per le proprietà citate nel paragrafo 2.2., si troverà su esso ($y_G = 0$). Per valutare numericamente x_G, immaginiamo di ruotare il semicerchio intorno ad *y*, otteniamo una sfera di volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. A questo punto si può ricavare $x_G = r = \frac{V}{2\pi A} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$. Discorso analogo può



essere fatto per il quarto di cerchio. Esso risulta simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (vedi figura a lato). Pertanto $x_G = y_G$. Immaginando di ruotare il quarto di cerchio $\left(A = \frac{\pi R^2}{4} \right)$ rispetto all' asse delle ordinate si ottiene una semisfera $V = \frac{2}{3}\pi R^3$. Quindi: $x_G = r = \frac{V}{2\pi A} = \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$

2.4. - Esempi di applicativi.

2.4.1. Data la seguente superficie, determinare le coordinate del suo baricentro applicando sia il teorema di Varignon che quello di Guldino (le quote sono espresse in mm).



VARIGNON. Scomponiamo la superficie in figure semplici come in figura. Prendendo come punto di riferimento il vertice in basso a sinistra della superficie, si ottiene:

$$S_y = \sum_{1}^{n} A_i \cdot x_i = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 \rightarrow$$

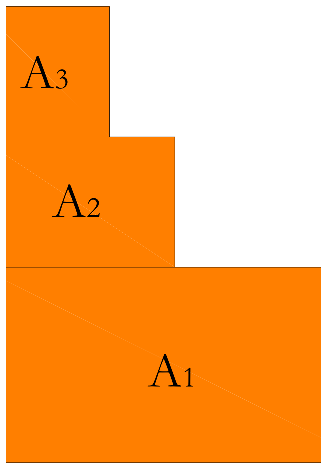
$$\rightarrow S_y = 1800 \cdot 30 + 600 \cdot 15 + 400 \cdot 10 = 67000 mm^3$$

$$S_y = \sum_{1}^{n} A_i \cdot y_i = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 \rightarrow$$

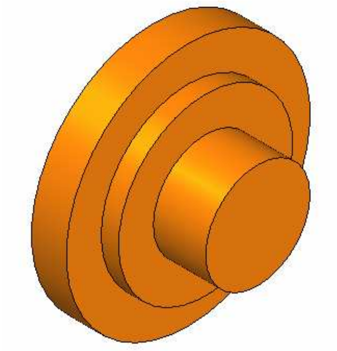
$$\rightarrow S_y = 1800 \cdot 15 + 600 \cdot 40 + 400 \cdot 60 = 75000 mm^3$$

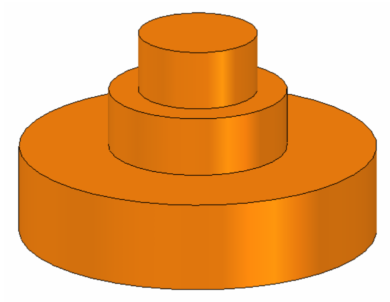
$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{67000}{2800} \approx 23{,}9 mm$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{75000}{2800} \approx 26{,}8 mm$$



<u>GULDINO:</u> ruotando la figura di 360° intorno ai 2 assi x e y (origine nel vertice in basso a sinistra), si ottengono i seguenti solidi:





Come si può notare, il volume dei due solidi di rivoluzione può essere trovato sommando i tre volumi dei cilindri che li compongono. Sapendo che il volume di un cilindro si calcola con la formula $V = \pi R^2 h$, si ottengono i seguenti risultati riportati di seguito.

Rotazione intorno all' asse y: $V_{(y)} = \pi \cdot 60^2 \cdot 30 + \pi \cdot 30^2 \cdot 20 + \pi \cdot 20^2 \cdot 20 \approx 420973{,}4 mm^3$

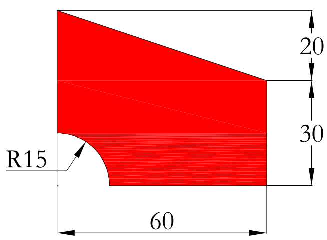
$$r_{(x)} = x_G = \frac{V_{(y)}}{2\pi A} \approx 23{,}9 mm$$

Rotazione intorno all' asse x: $V_{(x)} = \pi \cdot 70^2 \cdot 20 + \pi \cdot 50^2 \cdot 10 + \pi \cdot 30^2 \cdot 30 \approx 471238{,}9 mm^3$

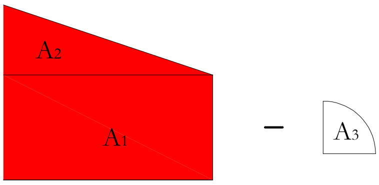
$$r_{(y)} = y_G = \frac{V_{(x)}}{2\pi A} \approx 26{,}8 mm$$

Come si può notare i risultati ottenuti, anche se approssimati, sono uguali a quelli ricavati col teorema di Varignon.

2.4.2. Data la seguente superficie, determinare le coordinate del suo baricentro applicando sia il teorema di Varignon che quello di Guldino (le quote sono espresse in mm).



VARIGNON: la superficie, può essere scomposta nelle seguenti aree:



Prendendo il vertice in basso a sinistra come punto di riferimento, si ottengono i seguenti risultati:

$$S_y = \sum_1^n A_i \cdot x_i = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 - A_3 \cdot x_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow S_y = 1800 \cdot 30 + 600 \cdot 20 - \frac{\pi \cdot 15^2}{4} \cdot \frac{60}{3\pi} = 64875 mm^3$$

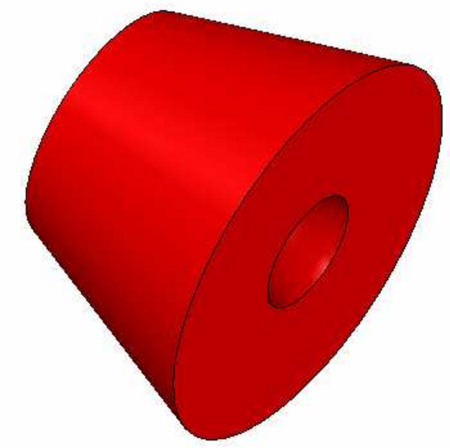
$$S_x = \sum_1^n A_i \cdot y_i = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3 \rightarrow$$

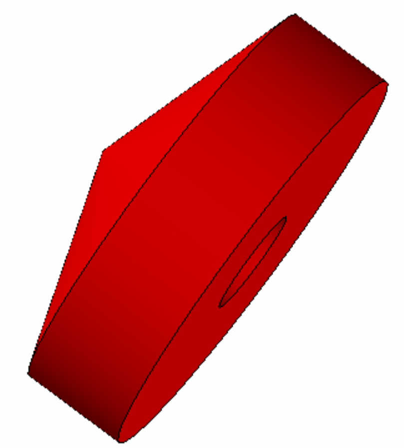
$$\rightarrow S_x = 1800 \cdot 15 + 600 \cdot \left(30 + \frac{20}{3}\right) - \frac{\pi \cdot 15^2}{4} \cdot \frac{60}{3\pi} \approx 47875 mm^3$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{64875}{2223} \approx 29{,}2 mm$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{47875}{2223} \approx 21{,}5 mm$$

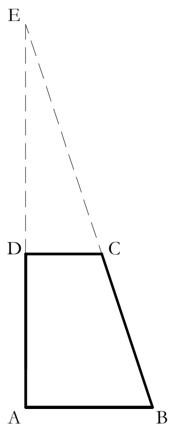
GULDINO: i due solidi ottenuti dalla rotazione della superficie in oggetto, intorno agli assi *x* e *y* sono rappresentati di seguito.





Il volume del solido ottenuto dalla rotazione intorno all' asse *x*, può essere calcolato sottraendo al volume di un tronco quello di una semisfera. Nel secondo il volume sarà dato dalla somma dei volumi di un cilindro e di un cono, diminuita del volume di una semisfera. Il volume di un cono è pari ad un terzo di quello di un cilindro, avente ugual raggio di base e uguale altezza. In relazione $V_{CILINDRO} = \pi R^2 \cdot h \rightarrow V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$.

Il volume di un tronco di cono è più complicato da ottenere, comunque sfruttando la trigonometria si può pervenire al risultato finale.



Il tronco di cono è ottenuto dalla rotazione a 360°, intorno al lato AD, del trapezio rettangolo ABCD. Immaginando di ruotare il triangolo ABE intorno ad AE si ottiene un cono. Stesso discorso per la rotazione del triangolo DCE intorno a DE. La differenza tra i volumi dei due coni, fornisce il risultato cercato. In relazione:

$$V_{TC} = V_1 - V_2 = \frac{\pi \cdot AB^2 \cdot AE}{3} - \frac{\pi \cdot CD^2 \cdot DE}{3}$$

Nella formula appena presentata, i termini AE e DE, sono incogniti. Per ricavarli si sfrutta la geometria piana e la trigonometria, infatti $C\hat{B}A \cong E\hat{C}D$ perché angoli corrispondenti rispetto alle rette AB e CD, tagliate dalla trasversale BC.

Ponendo $C\hat{B}A = \alpha$, dalla trigonometria si ha che $AD = (AB - DC) \cdot \tan\alpha \rightarrow \tan\alpha = \frac{AD}{(AB - DC)}$

Trovata la tangente, si ricava $AE = AB \cdot \tan\alpha \rightarrow DE = AE - AD$.

Sfruttando le quote fornite dal problema, si ottengono i seguenti risultati:

$$\tan\alpha = \frac{60}{20} \rightarrow \tan\alpha = 3$$

$$AE = AB \cdot \tan\alpha \rightarrow AE = 3 \cdot AB = 150mm$$

$$DE = AE - AD = 150 - 60 = 90mm$$

Il volume del tronco di cono vale pertanto:

$$V_{TC} = V_1 - V_2 = \frac{\pi \cdot 50^2 \cdot 150}{3} - \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 90}{3} \approx 307876{,}1mm^3$$

Abbreviando cilindro con CIL, cono con CN, semisfera con SS e tronco di cono con TC e applicando il teorema di GULDINO, si ottengono i seguenti risultati:

Rotazione intorno all' asse y: $V_{(y)} = V_{CIL} + V_{CN} - V_{SS} = \pi \cdot 60^2 \cdot 30 + \frac{1}{3}\pi \cdot 60^2 \cdot 20 - \frac{2}{3}\pi \cdot 15^3$

$$r_{(x)} = x_G = \frac{V_{(y)}}{2\pi A} = \frac{407621{,}6468}{2\pi \cdot 2223} \approx 29{,}2mm$$

Rotazione intorno all' asse x: $V_{(x)} = V_{TC} - V_{SS} = \left(\frac{\pi \cdot 50^2 \cdot 150}{3} - \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 90}{3}\right) - \frac{2}{3}\pi \cdot 15^3$

$$r_{(y)} = y_G = \frac{V_{(x)}}{2\pi A} = \frac{300807{,}5165}{2\pi \cdot 2223} \approx 21{,}5mm$$

I risultati ottenuti, sono gli stessi ricavati col teorema di VARIGNON. Il procedimento che ha portato ai risultati finali è stato però molto più oneroso dal punto di vista dei calcoli.