ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE STATALE " A. VOLTA "

con LICEO SCIENTIFICO TECNOLOGICO e BIOLOGICO.

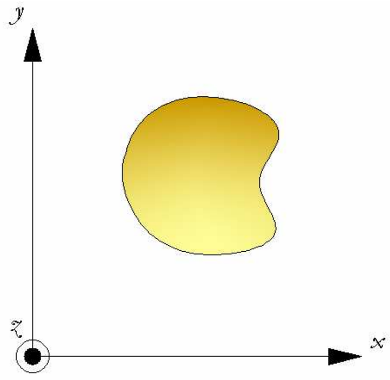
FORMAZIONE PROFESSIONALE: Operatore meccanico ed elettrico.

Classe IV MB. A.S. 2008/2009

DISPENSA INTEGRATIVA N° 1.

VINCOLI E REAZIONI VINCOLARI + ESEMPI DI STRUTTURE LABILI.

1.1. - Vincoli e reazioni vincolari.



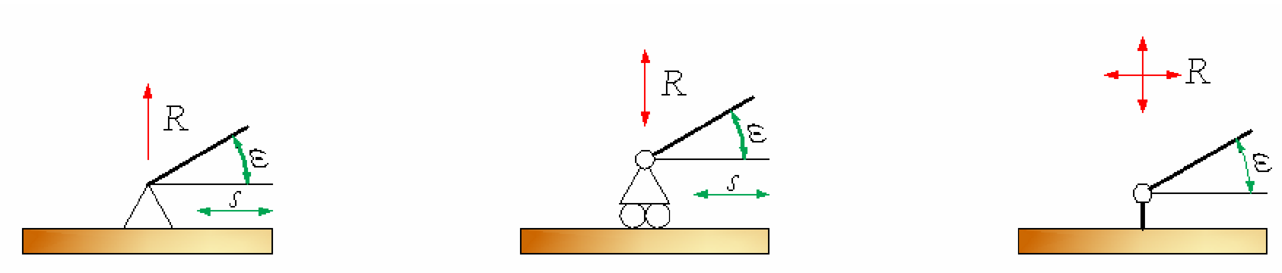
Definiamo *vincolo,* ogni restrizione imposta al moto di un corpo. In questo corso, consideriamo esclusivamente il moto nel piano. In un sistema bidimensionale, i gradi di libertà di un corpo continuo si riducono a 3: traslazione lungo l' asse *x*, traslazione lungo l' asse *y* e rotazione intorno ad un asse *z*, perpendicolare al piano. Affinché siano nulle le componenti dello spostamento, devono essere verificate due condizioni:

1 - I gradi di vincolo di un corpo nel piano devono essere uguali ai gradi di libertà.

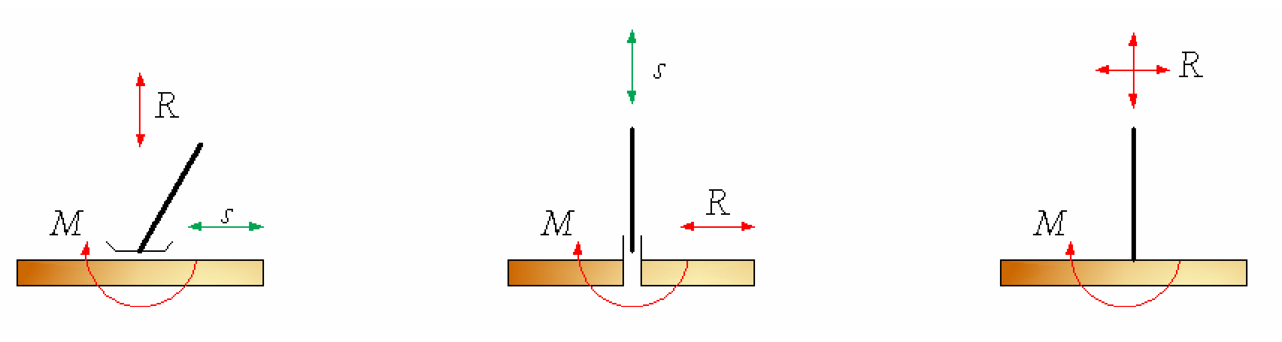
2 - I vincoli devono essere indipendenti.

Vediamo ora quali possono essere i vincoli nel piano, quali movimenti permettono e quali bloccano. Nelle figure seguenti, gli spostamenti permessi dal vincolo sono evidenziati in verde, quelli bloccati in rosso.

Appoggio. *Carrello.* *Cerniera.*



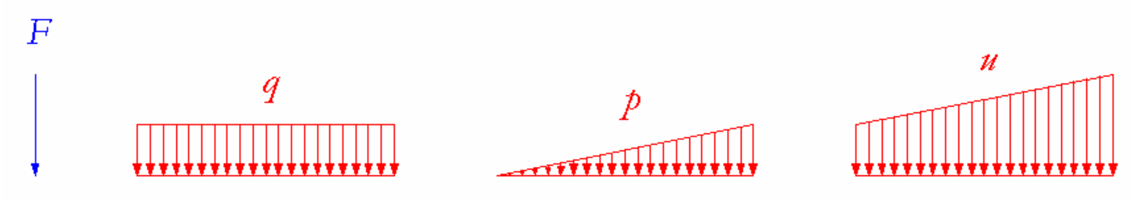
Pattino. *Manicotto.* *Incastro.*



I vincoli, bloccando alcuni movimenti, fanno fronte all' azione esercitata dalle forze attive (forze peso), esercitando forze o momenti di natura reattiva (reazioni vincolari). Per differenziare forze e momenti attivi da quelle reattivi, nel testo verrà posto un apice per indicare le azioni esercitate dai vincoli.

1.2. - Tipologie di carico (forze attive).

Nell' analisi dei sistemi piani, le forze attive che vengono studiate sono le seguenti: carico concentrato (*F*), carico uniformemente distribuito (*q*), carico a distribuzione lineare (*p*) e carico a distribuzione trapezoidale (*u*).



Per quanto riguarda i carichi distribuiti, dal punto di vista statico possiamo vederli come la loro risultante applicata nel loro baricentro. Esaminiamo ora i 3 casi:

- Carico uniformemente distribuito: se il carico è distribuito su una data lunghezza L, la risultante sarà $Q = q \cdot L$. Accostando il carico alla figura che lo rappresenta (rettangolo), sì può facilmente dedurre che la risultante sarà applicata nella mezzeria della lunghezza considerata.

- Carico linearmente distribuito: in questo caso il carico parte da un valore nullo per arrivare ad un valore massimo pari a *p*. La risultante sarà $P = \frac{p \cdot L}{2}$, applicata nel baricentro del triangolo. La coordinata baricentrica (*x*), può essere ricavata eseguendo la media aritmetica delle *x* dei vertici. Consideriamo come vertice A il punto dove il carico è nullo ed andiamo in senso antiorario per B e C. Le coordinate sono $A(0;0)$, $B(L;0)$, $B(L;P)$. Quindi: $x_P = \frac{0+L+L}{3} = \frac{2}{3}L$ a partire dal vertice A.

- Carico a distribuzione trapezoidale: il carico parte da un valore minimo (non nullo), per arrivare ad uno massimo. La risultante sarà: $U = \frac{(u_{\max} + u_{\min}) \cdot L}{2}$. Il calcolo della coordinata baricentrica, in questo caso, non è immediata come nelle tipologie precedenti. Scomponiamo il trapezio in due figure: un rettangolo di base L ed altezza $u_{\min}$ ed un triangolo di base L ed altezza $u_{\max} - u_{\min}$. Applicando la proprietà additiva (teorema di Varignon.), si perviene a:

$$x_U = \frac{(u_{\min} \cdot L) \cdot \frac{1}{2}L + \frac{(u_{\max} - u_{\min}) \cdot L}{2} \cdot \frac{2}{3}L}{\frac{(u_{\max} + u_{\min}) \cdot L}{2}} = \frac{\frac{1}{3}u_{\max} + \frac{1}{6}u_{\min}}{u_{\max} + u_{\min}} \cdot 2L$$

1.3. - Equazioni cardinali della statica.

Affinché un sistema sia in equilibrio, devono essere verificate entrambe le equazioni cardinali della statica.

1 - La risultante delle forze attive e reattive esterne deve essere nulla $\sum(\vec{F}+\vec{F}^{'})=0$

2 - Preso un polo generico O, sia esso interno od esterno al sistema, il momento risultante delle forze attive e reattive, rispetto a tale polo deve essere nullo $\sum(\vec{M}+\vec{M}^{'})_O=0$

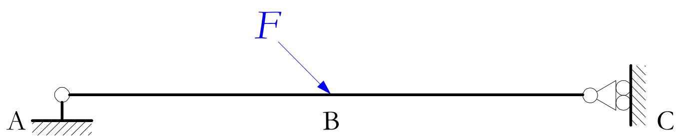
Le equazioni cardinali, sono di tipo vettoriale. Da esse possiamo ottenere un sistema di 3 equazioni scalari:

$$\begin{cases}\sum(F+F^{'})_x=0\\ \sum(F+F^{'})_y=0\\ \sum(M+M^{'})_O=0\end{cases}$$

1.4. - Strutture labili.

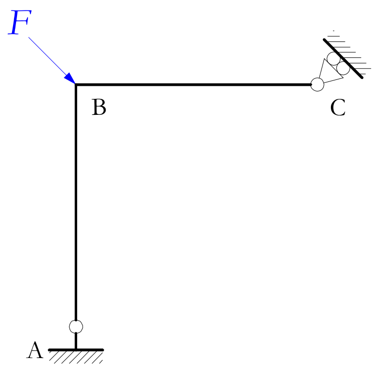
Per quanto riguarda le strutture isostatiche nel piano, la condizone GDL=GDV non è sufficiente a garantire l' equilibrio statico della struttura e nemmendo la risolubilità della struttura stessa (quantificare l' entita delle reazioni vincolari). Di seguito sono riportati alcuni esempi.

1 - Cerniera / carrello.



$$\begin{cases}\sum(F+F^{'})_x=0\\ \sum(F+F^{'})_y=0\\ \sum(M+M^{'})_C=0\end{cases}\begin{cases}H_A+F\cos 45°-H_C=0\\ V_A-F\sin 45°=0\\ V_A\cdot L-F\sin 45°\cdot\dfrac{L}{2}=0\end{cases}\begin{cases}H_C-H_A=F\cos 45°\\ V_A=F\sin 45°!!!!!\\ V_A=\dfrac{F\sin 45°}{2}!!!!!\end{cases}$$

Dalla prima equazione non siamo in grado di ricavare il valore delle due reazioni orizzontali. La seconda e terza equazione forniscono un risultato assurdo: la reazione verticale assume due valori distinti.



$$\begin{cases}\sum(F+F')_x = 0 \\ \sum(F+F')_y = 0 \\ \sum(M+M')_C = 0\end{cases} \begin{cases}H_A + F\cos 45° - H_C = 0 \\ V_A - F\sin 45° - V_C = 0 \\ V_A \cdot L - H_A \cdot L - F\sin 45° \cdot L = 0\end{cases} \begin{cases}H_C - H_A = F\cos 45° \\ V_A - V_C = F\sin 45° \\ V_A - H_A = F\sin 45°\end{cases}$$

Combinando la seconda e la terza equazione, si ottiene:

$$V_A - V_C = V_A - H_A \rightarrow H_A = V_C$$

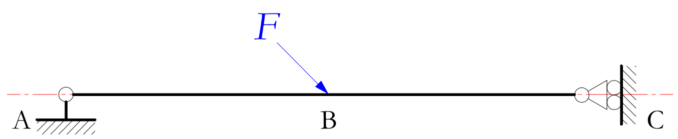
Sostituendo nella prima equazione:

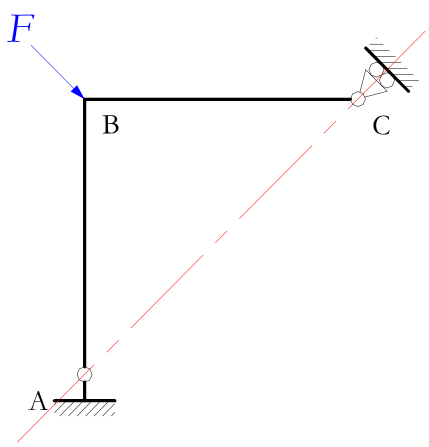
$$H_C - V_C = F\cos 45°$$

Ma questo è un assurdo, perché la reazione del carrello inclinato di 45°, può essere scomposta lungo gli assi x ed y, ottenendo due componenti di ugual modulo, quindi:

$$H_C = V_C \rightarrow H_C - V_C = F\cos 45° \rightarrow 0 = F\cos 45°.$$

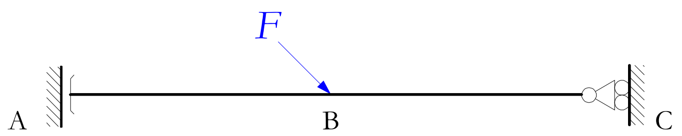
Guardano le due strutture labili, pur essendo diverse nella geometria e nel posizionamento dei vincoli, si può notare una caratteristica comune: l' asse del carrello passa per la cerniera.





Alla luce di quanto appena detto, si può affermare che una struttura cerniera carrello non è labile, se e solo se *l' asse del carrello non passa per la cerniera.*

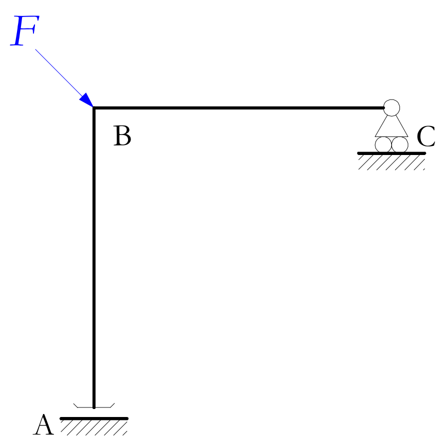
2 - Carrello / pattino.



Dalla figura si nota subito che una qualsiasi forza agente (o sua componente) perpendicolarmente all' asse della struttura provoca un movimento. Impostiamo comunque le 3 equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \sum (F+F')_x = 0 \\ \sum (F+F')_y = 0 \\ \sum (M+M')_C = 0 \end{cases} \begin{cases} H_A + F\cos 45° - H_C = 0 \\ -F\sin 45° = ? \\ -F\sin 45° \cdot \dfrac{L}{2} + M_A = 0 \end{cases} \begin{cases} H_C - H_A = F\cos 45° \\ -F\sin 45° = ? \\ M_A = \dfrac{FL\sin 45°}{2} \end{cases}$$

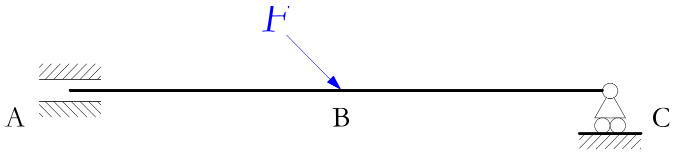
I risultati assurdi ottenuti si commentano da sé. La forza applicata provoca lo spostamento della struttura.



$$\begin{cases} \sum (F+F')_x = 0 \\ \sum (F+F')_y = 0 \\ \sum (M+M')_C = 0 \end{cases} \begin{cases} F\cos 45° = ??? \\ V_A - F\sin 45° + V_C = 0 \\ V_A \cdot L + M_A - F\sin 45° \cdot L = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso la forza applicata, provoca uno spostamento della struttura. In conclusione possiamo affermare che una struttura carrello - pattino non è labile se e solo se *i loro piani di scorrimento non sono paralleli o coincidenti.*

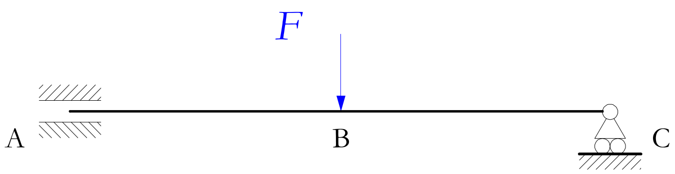
3 - Carrello / manicotto.



La forza agente provoca uno scorrimento orizzontale della struttura.

$$\begin{cases} \sum (F + F^{'})_x = 0 \\ \sum (F + F^{'})_y = 0 \\ \sum (M + M^{'})_A = 0 \end{cases} \begin{cases} F \cos 45° = ? \\ V_A - F \sin 45° + V_C = 0 \\ M_A + F \sin 45° \cdot \dfrac{L}{2} - V_C \cdot 2L = 0 \end{cases}$$

In questa configurazione, non siamo in grado di quantificare le reazioni vincolari. Proviamo a variare l' inclinazione del carico, rendendolo verticale.



$$\begin{cases} \sum (F + F^{'})_x = 0 \\ \sum (F + F^{'})_y = 0 \\ \sum (M + M^{'})_A = 0 \end{cases} \begin{cases} V_A + V_C = F \\ M_A + F \cdot \dfrac{L}{2} - V_C \cdot 2L = 0 \end{cases}$$

Non avendo carichi orizzontali, ci siamo ridotti ad un sistema di 2 equazioni in 3 incognite, il quale possiede infinite soluzioni!!!

La struttura ad angolo retto seguente è anch' essa non risolvibile (labile). Affinché una struttura carrello/manicotto sia non labile, *la retta d' azione del carrello non deve parallela o coincidente con l' asse del manicotto.*